DUYARLILIK ANALİZİ

Bir Doğrusal Programlama probleminin optimum çözümünü veren son simpleks tablosu elde edildiğinde, bu tablodaki bilgiler kullanılarak duyarlılık analizleri yapılabilir(Erdem, İ. 2017).

a) Karar değişkenlerinin amaç fonksiyonu katsayılarının değişim aralıklarının belirlenmesi

Son simpleks tablosunda, x_k karar değişkeninin katsayısı olan c_k 'nın değişim aralığı ne olmalıdır ki optimum çözümde yer alan temel değişkenlerin değerleri değişmesin?

Bu sorunun cevabını vermek için izlenecek adımlar aşağıdaki gibidir:

- Son simpleks tabloda yer alan c_k yerine $c_k + d_k$ konur.
- Bu değişiklik kullanılarak z_j ve $c_j - z_j$ satır vektörleri yeniden oluşturulur.
- Yeniden hesaplanmış olan $c_j - z_j$ satır vektörünün her elemanının; maksimizasyon probleminde "$c_j - z_j \leq 0$ " , minimizasyon probleminde "$c_j - z_j \geq 0$" şartını ortak sağlayan d_k değişim miktarı için bir aralık belirlenir. Bu bulgu yardımıyla da c_k 'nın değişim aralığı bulunur.

Örnek: Örnek 1'de son tablo aşağıdaki biçimde elde edilmişti.

c_j			500	800	0	0	0
	TD	**TDD**	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	s_3
0	s_1	900/120=15/2	0	0	1	3/4	-23/24
800	x_2	540/120=9/2	0	1	0	1/4	-1/24
500	x_1	36/24=3/2	1	0	0	-1/4	5/24
	$\boldsymbol{z_j}$	4350	500	800	0	75	1700/24
	$\boldsymbol{c_j - z_j}$	--	0	0	0	-75	-1700/24

Burada, x_1 karar değişkeninin $c_1 = 500$ olan amaç fonksiyonu katsayısı için, optimalliği bozmayan bir değişim aralığı belirleyelim.

c_j			$500+d_1$	800	0	0	0
	TD	**TDD**	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	s_3
0	s_1	900/120	0	0	1	¾	-23/24
800	x_2	540/120	0	1	0	¼	-1/24
$500+d_1$	x_1	36/24	1	0	0	-1/4	5/24
	$\boldsymbol{z_j}$	4350	$500+d_1$	800	0	200-(500+d_1)/4	(1700+5d_1)/24
	$\boldsymbol{c_j-z_j}$	--	0	0	0	-200+(500+d_1)/4	-(1700+5d_1)/24

Optimalliğin bozulmaması için $c_j - z_j \leq 0$ şartının sağlanması gerekir. Böylece,

$-200+(500+d_1)/4 \leq 0$ ve $-(1700+5d_1)/24 \leq 0$

olmalıdır. Bu iki eşitsizlik d_1 için ortak çözülürse;

$d_1 \leq 300$ ve $d_1 \geq -340$ bulunur.

b) Kısıtların sağ taraf değerlerinin değişim aralıklarının belirlenmesi

Optimum çözümü veren simpleks tablosunu kullanarak kısıt i-nin sağ taraf değeri b_i'nin değişim aralığı ne olmalıdır ki mevcut temel değişkenler aynı kalsın?

Bu sorunun cevabını vermek için izlenecek adımlar aşağıdaki gibidir:

- Son simpleks tabloda, aylak değişkenlere karşılık gelen matris alınır.
- Orijinal sağ taraf sabitlerinde b_i yerine $b_i + d_i$ konur ve sütun vektörü elde edilir.

(Aylak değişkenlere karşılık gelen matris)x(elde edilen sütun vektörü)

sonucu elde edilir.

- Elde edilen sonuçtaki her bir değerin ≥ 0 şartını sağlaması gerektiği gerçeğinden hareketle d_i değişim miktarı için bir aralık belirlenir.

Bu aralık yardımıyla b_i 'nin değişim aralığı bulunur.

Örnek: (Erdem,İ., 2017).

$$Max\ Z: \quad 3x_1 + 8x_2$$

$$Kısıtlar: \quad 0x_1 + 8x_2 \leq 40$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 32$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Yukarıdaki problemin optimal çözümünü veren simpleks tablosu aşağıdadır.

c_j			3	8	0	0	0
	TD	**TDD**	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
8	x_2	4	0	1	0	-1/4	1/2
0	s_1	8	0	0	1	2	-4
3	x_1	8	1	0	0	1	-1
	z_j	56	3	8	0	1	1
	$c_j - z_j$	--	0	0	0	-1	-1

İkinci kısıtın sağ taraf sabiti olan 32 değeri için değişim aralığı ne olmalıdır ki, optimal çözümde temelde yer alan değişkenler aynı kalsın?

Çözüm:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 32 + d_2 \\ 24 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 - \frac{d_2}{4} \\ 8 + 2d_2 \\ 8 + d_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan,

$$4 - \frac{d_2}{4} \geq 0 \ \Rightarrow d_2 \leq 16$$

$$8 + 2d_2 \geq 0 \Rightarrow d_2 \geq -4$$

$$8 + d_2 \geq 0 \Rightarrow d_2 \geq -8$$

olup $-4 \leq d_2 \leq 16$ aralığı elde edilir. Bunu kullanarak ikinci kısıtın sağ taraf sabitinin değişim aralığı;

$b_2 = 32 + d_2 \quad \Rightarrow 28 \leq b_2 \leq 48$ bulunur.

Yani ikinci kısıtın sağ taraf değeri $[28\,, 48]$ aralığında hangi değeri alırsa alsın, temeldeki değişkenler aynı kalır.

NOT: (Kaynakların marjinal değerlerinin belirlenmesi)

Optimal çözümü veren son simpleks tablosundaki aylak ve artık değişkenlere karşılık gelen z_j değerleri mevcut kaynakların marjinal değerleridir.

DUALİTE (İKİLİLİK)

n tane değişken ve m tane kısıtlayıcı bulunan bir Doğrusal Programlama problemi genel olarak aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$Max\ (veya\ Min)\ Z:\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots +\ c_nx_n$$

$$Kısıtlayıcılar:\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots +\ a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots +\ a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots +\ a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, \ldots x_n \geq 0$$

Böyle bir problem, matris formunda;

$$c^T = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \quad ; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$Max\ (veya\ Min)\ Z:\ \ c^TX$$

$$Kısıtlayıcılar:\quad AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

biçiminde olur. Buna, orijinal problem (primal problem) denir.

Her doğrusal programlama problemi ile yakından ilişkili başka bir doğrusal programlama problemi daha vardır. Buna, orijinal problemin (Primal Problemin) duali (İkizi, ikilisi) adı verilir. Dual problemin duali alındığında, primal problem elde edilir.

- Primal ve dual problemlerden birinin optimum çözümü varsa, diğerinin de optimum çözümü vardır.
- Optimum çözüm noktasında amaç fonksiyonu değerleri aynıdır.
- Bu iki problemden birinin optimum çözümü bulunursa, optimum çözümü veren simpleks tablosundan yararlanarak diğerinin optimum çözümü bulunabilir.

- Primal ve dual problemlerden birinin çözümü diğerine göre daha kolaydır. Kolay olanın çözülmesi tercih edilir.

Dual problem elde edilirken önce, orijinal problem kononik forma sokulur. (Kısıtların sağ taraf sabitleri pozitif olacak, eşitsizliklerin tümü aynı yönde olacak). Daha sonra aşağıdaki biçimde dual alınır:

Primal Problem	Dual Problem	Dual Problemin Duali (Primal)
$Max\ Z:\ c^TX$	$Min\ Z:\ b^TY$	$Max\ Z:\ c^TX$
$K.lar:\quad AX \leq b$	$K.lar:\quad A^TY \geq c$	$K.lar:\quad AX \leq b$
$X \geq 0$	$Y \geq 0$	$X \geq 0$

Değişken karmaşasını önlemek için, Dual problemin değişkenlerini Y ile gösterdik.

Primal Problem	Dual Problem	Dual Problemin Duali (Primal)
$Min\ Z:\ c^TX$	$Max\ Z:\ b^TY$	$Min\ Z:\ c^TX$
$K.lar:\quad AX \geq b$	$K.lar:\quad A^TY \leq c$	$K.lar:\quad AX \geq b$
$X \geq 0$	$Y \geq 0$	$X \geq 0$

Örnek: Erdem, İ.(2017, s:142). Aşağıdaki doğrusal programlama probleminin dualini alalım.

$$Min\ Z:\ 224x_1 + 280x_2 + 184x_3 \quad (\text{ Primal })$$

$$\begin{aligned} K.lar: 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &\geq 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 &\geq 4 \\ 4x_1 - 5x_2 + 4x_3 &\geq 5 \\ 3x_1 + 10x_2 - 2x_3 &\geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dual problem,

$$Max\ Z:\ 3y_1 + 4y_2 + 5y_3 + 4y_4$$

$$\begin{aligned} K.lar: 2y_1 + 5y_2 + 4y_3 + 3y_4 &\leq 224 \\ 5y_1 + 4y_2 - 5y_3 + 10y_4 &\leq 280 \\ 2y_1 + 4y_2 + 4y_3 - 2y_4 &\leq 184 \end{aligned}$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

biçiminde olur.

Örnek: (Erdem, İ. 2017s:143).

Önceki örnekteki problem için, çözümü daha kolay olacak olan dual problemi simpleks yöntemle çözdükten sonra primal problemin çözümünü elde edelim.

$$Max\ \ Z{:}\ \ 3y_1 + 4y_2 + 5y_3 + 4y_4$$

$$K.lar{:}\ 2y_1 + 5y_2 + 4y_3 + 3y_4 \leq 224$$

$$5y_1 + 4y_2 - 5y_3 + 10y_4 \leq 280$$

$$2y_1 + 4y_2 + 4y_3 - 2y_4 \leq 184$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

Eşitsizlikleri eşitlik haline getirirsek aşağıdaki gibi olur:

$$Max\ \ Z{:}\ \ 3y_1 + 4y_2 + 5y_3 + 4y_4$$

$$K.lar{:}\ 2y_1 + 5y_2 + 4y_3 + 3y_4 + s_1 = 224$$

$$5y_1 + 4y_2 - 5y_3 + 10y_4 + s_2 = 280$$

$$2y_1 + 4y_2 + 4y_3 - 2y_4 + s_3 = 184$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

c_j			3	4	5	4	0	0	0	ORAN
	TD	**TDD**	$\boldsymbol{y_1}$	$\boldsymbol{y_2}$	y_3	y_4	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{s_3}$	
0	s_1	224	2	5	4	3	1	0	0	224/4=56
0	s_2	280	5	4	-5	10	0	1	0	-----
0	s_3	184	2	4	4	-2	0	0	1	**184/4=46**
	$\boldsymbol{z_j}$	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$\boldsymbol{c_j - z_j}$	---	3	4	**5**	4	0	0	0	

c_j			3	4	5	4	0	0	0	ORAN
	TD	**TDD**	$\boldsymbol{y_1}$	$\boldsymbol{y_2}$	y_3	y_4	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{s_3}$	
0	s_1	40	0	1	0	5	1	0	-1	**40/5=8**
0	s_2	510	15/2	9	0	15/2	0	1	5/4	1020/15=68
5	y_3	46	2/4	1	1	-2/4	0	0	1/4	-----
	$\boldsymbol{z_j}$	230	10/4	5	5	-10/4	0	0	5/4	
	$\boldsymbol{c_j - z_j}$	---	2/4	-1	0	**26/4**	0	0	-5/4	

c_j			3	4	5	4	0	0	0	ORAN
	TD	**TDD**	$\boldsymbol{y_1}$	$\boldsymbol{y_2}$	y_3	y_4	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{s_3}$	
4	y_4	8	0	1/5	0	1	1/5	0	-1/5	----
0	s_2	450	15/2	15/2	0	0	-15/10	1	11/4	**900/15=60**
5	y_3	50	2/4	11/10	1	0	1/10	0	3/20	200/2=100
	$\boldsymbol{z_j}$	282	10/4	63/10	5	4	13/10	0	-1/20	
	$\boldsymbol{c_j - z_j}$	---	**2/4**	-23/10	0	0	-13/10	0	1/20	

c_j			3	4	5	4	0	0	0	ORAN
	TD	**TDD**	$\boldsymbol{y_1}$	$\boldsymbol{y_2}$	y_3	y_4	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{s_3}$	
4	y_4	8	0	1/5	0	1	1/5	0	-1/5	
3	y_1	60	1	1	0	0	-2/10	2/15	11/30	
5	y_3	20	0	3/5	1	0	1/5	-1/15	-1/30	
	$\boldsymbol{z_j}$	312	3	34/5	5	4	6/5	1/15	4/30	
	$\boldsymbol{c_j - z_j}$	---	0	-14/5	0	0	-6/5	-1/15	-4/30	

$\boldsymbol{c_j - z_j} \leq 0$ dır. O halde optimal çözüm bulunmuştur.

Optimal çözüm: $y_1 = 60$, $y_2 = 0$, $y_3 = 20$, $y_4 = 8$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$, Max Z = 312 olarak elde edilir.

Son simpleks tablodaki bilgilerden yararlanarak Primal problemin çözümü;

$x_1 = 6/5$, $x_2 = 1/15$, $x_3 = 4/30$, $v_1 = 0$, $v_2 = 14/5$, $v_3 = 0$, $v_4 = 0$, Min Z = 312 olarak elde edilir.